1 Suites

Exercice 1. Avec taux d'accroissement connus calculer les limites:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{\sin(1/n)}$
2. $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{3}\sin(n^4)\cdot\frac{1}{n^2}\right)$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{e^{-n}}-1}\cdot\sin(2^{-n})$
4. $\lim_{n\to\infty} n\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)}$

Exercice 2. Étudier convergence

1. $\frac{\cos(n)}{n+1}$
2. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$
3. $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$
4. $\frac{e^n+n}{n^4+1}$
5. $\frac{e^n+(-1)^n\sin(n^{100})}{n^5+\ln n}$
6. $\frac{\ln n+1}{n^4+5}$
7. $\frac{\sin(1/n)\cos(n)}{\cos(1/n^{200})}$
8. $\frac{\sin(1/n^2)e^{\cos(1/n^2-5n^{-5})}}{2^{\sin(n)}}$
9. $\binom{n+4}{4}\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)}\right)\right)$
10. $\binom{n+3}{3}\ln\left(1+\frac{\cos(n^2)}{2}\sin\left(\frac{1}{(1+n)(2+n)(3+n)}\right)\right)$

Exercice 3. Soit $\alpha\in(0,1)$ et u_n donné par une formule recursive:

$$u_{n+1}=u_n^\alpha+1 \quad u_0>0$$

Démontrer que u_n est majoré pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\geq 0$,

$$u_{n+1}=2u_n+n.$$

1. Montrer qu'il existe une suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En étudiant la suite $(u_n-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=2u_n+5^n.$$

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=\frac{u_n}{5^n}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique ; en déduire l'expression de son terme général.
2. En déduire l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6.

1. Déterminer toutes les suites réelles bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

2. Déterminer toutes les suites réelles bornées $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = 12(-1)^n.$$

Exercice 7. Soit $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Construire deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant respectivement vers 1 et $+\infty$, telles que
$$u_{v_n}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Exercice 8. Étudier la convergence des trois suites $(u_n)_{n\geq 1}$ dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$;
2. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor$;
3. $u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!$.

Exercice 9. Montrer que la suite de terme général
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$$
est convergente et préciser sa limite.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
Montrer que
$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive sous-additive, c'est-à-dire telle que
$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+m} \leq u_n + u_m.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\delta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq N$,
$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n} + \delta.$$

2. Montrer que
$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{u_k}{k}.$$

2 Polynoms

Exercice 12. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(z+1)^n = e^{i2na}.$$
2. En déduire
$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\Big(a + \frac{k\pi}{n}\Big) \quad \text{puis} \quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin\Big(\frac{k\pi}{n}\Big).$$

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^n$ et $B = X^2 - 3X + 2$;
2. $A = X^n$ et $B = (X-1)^2$;
3. $A = (X \sin t + \cos t)^n$ et $B = X^2 + 1$, où t est un réel.

Exercice 14. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\sqrt{2}) = 0$. Montrer que $P(-\sqrt{2}) = 0$.

Exercice 15. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\exists A > 0 \quad \forall x \geq A, \quad P(x) = \ln(x).$$

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $p, q \in \mathbb{N}$. En calculant de deux façons différentes le produit $(1+X)^p(1+X)^q$, montrer la formule de convolution de Vandermonde :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$
2. En déduire la valeur de
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Exercice 17. Soit $P \in K[X]$. Montrer qu'il existe $Q \in K[X]$ tel que
$$P(P(X)) - X = Q(X)\big(P(X) - X\big).$$

Exercice 18.

1. Soit $P \in K[X]$. Montrer qu'il existe un unique couple $(R_0, R_1) \in K[X]^2$ tel que
$$P(X) = R_0(X^2) + XR_1(X^2).$$
2. Soit $P, Q \in K[X]$ tels que
$$P(X)^2 = Q(X^2).$$
Montrer qu'il existe $R \in K[X]$ tel que
$$P(X) = R(X^2) \quad \text{ou} \quad P(X) = XR(X^2).$$

Exercice 19.

1. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$ est constant.

2. Résoudre l'équation
$$P(X+1)-P(X)=X,$$
d'inconnue $P\in\mathbb{C}[X]$.

Exercice 20. Déterminer tous les polynômes $P\in K[X]$ tels que :

1. $P(2X)=P(X)-1$;
2. $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$;
3. $P\circ P=P$;
4. Il existe $Q\in K[X]$ tel que $Q^2=XP^2$.

Exercice 21. Trouver tous les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que
$$\forall k\in\mathbb{Z},\quad \int_k^{k+1} P(t)\,dt=k+1.$$

Exercice 22. Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que
$$X(X+1)P''(X)+(X+2)P'(X)-P(X)=0.$$

3 Continuite, limites, variations

Exercice 23. Étudier la continuité de la fonction
$$x\longmapsto \lfloor x\rfloor+(x-\lfloor x\rfloor)^2.$$

Exercice 24. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique. Montrer que f possède une limite en $+\infty$ si et seulement si f est constante.

Exercice 25. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction bijective et croissante. Montrer que
$$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$

Exercice 26. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction. Montrer que
$$f(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\ell\quad\text{si et seulement si}\quad f(\sin x)\xrightarrow[x\to 0]{}\ell.$$

Exercice 27. Soit $f:[-1,1]\to(0,1]$ une fonction continue. Démontrer que une equation $f(x)=x^4$ possède au moins deux solutions.

Exercice 28. Soit f une fonction continue définie sur l'interval $[1/(2\sqrt{2}),2\sqrt{2}]$ et qui vérifie l'égalité
$$f(2\sqrt{2})-f(1/(2\sqrt{2}))=3$$
Démontrer qu'il existe une nombre réele x telle que $f(2x)-f(x)=1$.

Exercice 29. Trouver les valeurs $a,b,c\in\mathbb{R}$ pour lesquels une fonction f est continue sur $\mathbb{R}$
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+a^2} & |x|>1\\ ax^2+bx+c & |x|\leq 1\end{cases}$$

Exercice 30. De même, mais pour $f : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ ci-dessous:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a\sqrt{x}-b}{x^2-4} & x > 2 \\ \frac{cx}{x-2} & 0 < x < 2 \end{cases}$$

Exercice 31. Soit $f(x) = \ln(1 - x^2), |x| \leq 1$. Trouver toutes les polynôms pour lesquels la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{Q(x)}{f(x)}$$

existe et est une nombre réele.

Exercice 32.

A l'aide de théorème d'accroissements finis ou fonctions equivalents determiner

$$\lim_{x \to \infty} \left((x+1)\, e^{\frac{1}{1+x}} - x e^{\frac{1}{x}} \right)$$

Exercice 33.

En utilisant les memes outils démontrer

$$(n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}} \simeq -\frac{\ln n}{n^2}$$

Exercice 34.

Montrer que

$$\forall x > 0 \quad \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

En déduire, pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$$

Exercice 35.

Calculer une limite:

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{1}{\sin(\frac{1}{x+\varphi(x)})} - \frac{1}{\sin(\frac{1}{x+\psi(x)})} \right]$$

où $\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ et $\psi(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 36.

Calculer la dérivée n-ieme:

$$x \mapsto \cos^3(x) \tag{1}$$
$$x \mapsto x\cos(x) \tag{2}$$
$$x \mapsto x^2(1+x)^n \tag{3}$$

Exercice 37.

Determiner si une fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} \exp\left(-1/|x|\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

est

1. continue en $x_0 = 0$.

2. Derivable ?

3. trouver inf et sup sur $\mathbb{R}$

Exercice 38.
Soit $f(x) = \sin \ln(x)$ pour $x > 0$. Determiner $c, d > 0$ telles que:

1. f est lipschitzienne sur $[c, \infty)$

2. f est lipschitzienne sur $(0, d]$

Exercice 39.
Trouver inf d'une fonction

$$f(x) = \ln(e^x - 1) + \frac{2}{x} - x$$

Exercice 40.
Trouver toutes les nombres reels a, b telles qu'une fonction

$$f(x) = \begin{cases} a(x+1) + \sin(bx) & x \geq 0 \\ \frac{\cos(x)-1}{x\sin(x)} & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

soit derivable

Exercice 41.
Determiner la table de variation d'une fonction

$$f(x) = e^{-|2x+1|}\left(x^2 + 2x + 3\right)$$

Exercice 42.
Soit $a, b, c > 0$ les cotes d'une triangle et soit $a + b + c = 2p$. Fixons $p > 0$. Trouver a, b, c telles que l'area A de ce triangle soit maximale.
Rappel : $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Exercice 43.
Demontrer

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2/2} = 1$$

Indic. utiliser $\forall x > a \;\; f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s)ds$

Exercice 44.
Calculer une limite:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\cos(x) - \sin(x)}$$

Exercice 45.
Calculer une limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{x \cdot \sin(\sin(x))}$$

4 Convexite

Exercice 46.
Trouver les extrema locaux d'une fonction $f :]0, e^2[\to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{-2}{\ln(x) - 2}$$

Existe-t-il un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(x) = (f(x))^n$ est convexe sur toute l'intervalle $]0, e^2[$?

Exercice 47.
Soit $f_n(x) = \sqrt[n]{\exp(x)} : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$. Existe-t-il un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que f_n est concave (c'est-a-dire $-f_n$ est convexe) sur l'intervalle $[0,1]$?

Exercice 48.
En utilisant l'inégalité de Jensen démontrer que si $N \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i \in \{1,\ldots,N\}}$ est une ensemble de nombres positifs, alors pour $p \geq 1$ on a:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^p \leq N^{p-1} \sum_{i=1}^{N} x_i^p$$

Exercice 49.
Démontrer que pour toutes $x, y \in \mathbb{R}_+$ on a

$$x^x \cdot y^y \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{(x+y)}$$

Exercice 50.
Démontrer que pour toutes $e < x < y$ on a

$$x^y < y^x$$

Exercice 51. Soit f:

$$f(x) = \frac{(\sqrt[3]{x})^5 + 3\sqrt[3]{x^8}}{x \cdot \sqrt[6]{x}}$$

Démontrer que si $a, b, c > 0$ et $a + b + c = 3$ alors $f(a) + f(b) + f(c) \geq 12$.

5 Developpement limites

Exercice 52.
Démontrer que pour $|x| < 1$ l'erreur d'approximation

$$\cos(x) \simeq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

ne dépasse pas $\frac{1}{720}$.

Exercice 53.
Calculer le cinqiueme terme de DL de $x \mapsto \sin(\tan(x))$.

Exercice 54.
Trouver toutes les a, b telles que la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - (a + b\cos(x))\sin(x)}{x^5}$$

existe

Exercice 55.
Calculer la limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(1-\cos(x)) - (\tan(\sin(x)))^2}{(1-\cos(x))^2}$$

Exercice 56.
DL autour de $x = 2$ de $f(x) = x^5 + x^4 + 2x + 1$

Exercice 57.
En utilisant seulement le DL, calculer $\ln 3 - \ln 2$ avec precision $\simeq 1/1000$.

Exercice 58.
A l'aide de DL pour $n = 3$, trouver l'approximation de $\sqrt[3]{e}$. Donner l'erreur de l'approximation.

Exercice 59.
Calculer une limite

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\arctan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Exercice 60.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\sin(x)\tan(x\sin(x))} - \frac{1}{x^2\sin^2 x}\right)$$

Exercice 61.
Soit $f(x) = 2 - 2\cos(x) - x\cdot\sin(\sin(x))$ et considerons $a_n = f(1/n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Trouver toutes les nombres reels w telles que

$$\lim_{n\to\infty} n a_n^w = 0$$

Exercice 62.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x) - x}{\tan(2x) - 2\ln(1+x) - x^2}$$

6 Algebre lineaire

Exercice 63.
Soit V, W sous-espaces de $\mathbb{R}^6$ et $V \subset W, \dim V = 5, W \neq \mathbb{R}^6$. Est-ce que ça veut dire que $W = V$?

Exercice 64.
Soit $\varphi : V \to W$ ou V, W sont deux espaces vectoriels de dimension fini sur $\mathbb{Q}$. Soit $\mathcal{A}$ une base d'espace V. Est-ce qu'on peut toujours trouver une base $\mathcal{B}$ de W telle que toutes les coefficients de $M(\varphi)_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}}$ appartiennent aux entieres ?

Exercice 65.
Soit V un espace vectoriel donne par:

$$V = \mathrm{Vect}\left((1,2,0,1,0),(0,1,1,1,1),(2,2,3,0,3),(1,3,1,2,1)\right)$$

Trouver dim d'un espace $V \cap \mathrm{Vect}\left((3,1,2,-1,2),(1,1,1,1,1)\right)$

Exercice 66.
On considere $u = (1,0,1,0), v = (0,1,-1,0), w = (1,1,1,1), x = (0,0,1,0), y = (1,1,0,-1)$. Soit $F = \mathrm{Vect}\,(u,w,v)\,, G = \mathrm{Vect}\,(x,y)$. Determiner dimensions de $F, G, F+G, F\cap G$.

Exercice 67.
Soit $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ l'application lineaire. Est-ce possible que $\dim\ker\varphi = \dim \mathrm{im}\varphi$?

Exercice 68.
Soit $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ des bases d'espace lineaire V sur $\mathbb{R}$, et

$$\beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \quad \beta_2 = -\alpha_2 \quad \beta_3 = 2\alpha_2 + \alpha_3$$

Existe-t-il un vecteur $\gamma \in V$ qui a les coordonnées identique dans les bases A et B ?

Exercice 69.
Soit φ une application lineaire $\mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ donne par:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, x_1 - x_3 + x_4, 3x_1 + x_2 + x_4)$$

1. Trouver une base de $\ker\varphi$
2. Determiner une matrice de transition/passage $P_{\mathcal{A}\to \mathrm{st}}$ ou

$$\mathcal{A} = \mathrm{Vect}\left((1,1,0),(0,1,2),(0,0,1)\right)$$

3. Trouver, si possible, les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ des espaces $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3$ (respectivement) telles que une matrice $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ a exactement deux coefficients non-nulles

Exercice 70.
Soit une base $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}\left((0,1,-2),(1,1,-1),(0,1,-1)\right)$ et pour chaque $t \in \mathbb{R}$ definissons $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}\to\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 2 & t & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de t φ est-elle une isomorphisme ?
2. Determiner $\varphi_0(1,2,3)$

Exercice 71.
Soit $V_1 = \mathrm{Vect}\left((2,1,1,1),(3,1,0,2),(1,1,2,0)\right)$ et V_2

$$\begin{cases} -3x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ tx_1 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

Trouver toutes $t \in \mathbb{R}$ telle que $V_1 \bigoplus V_2 = \mathbb{R}^4$. Trouver une base de $V_1 \cup V_2$ en fonction de t

Exercice 72.
Soit A, B des bases donnes par

$$A = \{(3,1,1),(1,0,0),(5,1,0)\}, \quad B = \{(3,4,5),(4,1,1),(2,0,1)\}.$$

1. Determiner une matrice $M_{AB}(f)$ d'application lineaire $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ donne par

$$f(x,y,z) = (4x + y + z, 3x + 2y + z, 3x + 2y + z).$$

2. Donner une endomorphisme $g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ avec une matrice

$$M_{AB}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 73.
Soit

$$A = \{(1,-2,0),(1,1,1),(0,0,-1)\},$$
$$B = \{(1,0,1,0),(0,1,1,1),(0,1,1,0),(1,1,1,1)\},$$
$$C = \{(1,1),(-1,0)\}.$$

L'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ est donne par

$$f(x,y,z) = (3x - y - 2z, x + y + z, -x + 2z, x + 2y - z),$$

mais $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ est determine par

$$M_{BC}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculer $M_{AC}(g \circ f)$ et $M_{st}(g \circ f)$.

Exercice 74.
Soit $V = M_{2,3}(\mathbb{Q})$ et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

La transformation $f : V \to V$ définie par

$$f(X) = AX + XB$$

est-elle linéaire ? Si oui, déterminez la matrice $M_E(f)$ dans la base $E = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$, où $E_{ij} \in M_{2,3}(\mathbb{Q})$ est la matrice dont l'élément (i,j) est égal à 1 et les autres éléments sont nuls.

Exercice 75.
Soit $U = \mathrm{Vect}\,((1,i,1),(2,1-i,0)) \in \mathbb{C}^3$. Trouver sous-espace V telle que $V \bigoplus U = \mathbb{C}^3$. Trouver une matrice de projecteur M sur U.

Exercice 76.
Trouver une exemple d'endomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\varphi^3 = 0 \quad \ker\varphi = \mathrm{Vect}\,((-1,2,1)) \quad (1,1,2) \in \mathrm{im}\varphi$$

Exercice 77.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Demontrer que $\dim\ker f = 2$
2. Demontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est egale a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 78.
Soit V, W sous-espaces de $\mathbb{R}^6$ et $V \subset W, \dim V = 5, W \neq \mathbb{R}^6$. Est-ce que ça veut dire que $W = V$?

Exercice 79.
Soit f une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lineaire sur $\mathbb{R}^2$ avec une base $\{1, i\}$ qui est determine par une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & c \end{pmatrix}$, c'est-a-dire

$$z = (z_R, z_C) = z_R + iz_C \quad f(z) = Mz = (az_R + cz_C, bz_R + dz_C) = (az_R + cz_C) + i(bz_R + dz_C)$$

Demontrer qu'il existent $p, q \in \mathbb{C}$ telles que $f(z) = pz + q\bar{z}$. Trouver les conditions sur p, q pour que f soit lineaire en $\mathbb{C}$.

Exercice 80.

Soit $V_1 = \text{Vect}\left((2,1,1,1),(3,1,0,2),(1,1,2,0)\right)$ et V_2

$$\begin{cases} -3x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ tx_1 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

Trouver toutes $t \in \mathbb{R}$ telle que $V_1 \bigoplus V_2 = \mathbb{R}^4$. Trouver une base de $V_1 \cup V_2$ en fonction de t

Exercice 81.

Soit V un espace vectoriel donne par:

$$V = \text{Vect}\left((1,2,0,1,0),(0,1,1,1,1),(2,2,3,0,3),(1,3,1,2,1)\right)$$

Trouver dim d'un espace $V \cap \text{Vect}\left((3,1,2,-1,2),(1,1,1,1,1)\right)$

Exercice 82.

Dans l'espace $\mathbb{R}^{11}$ on a deux sous-espaces V, W et $\dim V = 6, \dim W = 8$. Est-ce possible que $\dim V \cap W = 5$, si oui donner l'exemple.

Exercice 83.

On considere $u = (1,0,1,0), v = (0,1,-1,0), w = (1,1,1,1), x = (0,0,1,0), y = (1,1,0,-1)$. Soit $F = \text{Vect}\left(u,w,v\right), G = \text{Vect}\left(x,y\right)$. Determiner dimensions de $F, G, F+G, F \cap G$.

Exercice 84.

Soit $X = \{f \in \mathbb{C}[x], \text{deg} f \leq 3\}$ et $U = \{f(0) = f'(0) = 0\}, U \subset X$. Trouver $V \subset X$ telle que $V \bigoplus U = X$ et trouver le projecteur $p \in \text{End}(X)$ sur U.

Exercice 85.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit

$$\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \quad \varepsilon_2 = e_2 + e_3$$

Montrer que la famille $(\varepsilon_1; \varepsilon_2)$ est libre et compléter celle-ci en une base de E.

Exercice 86.

Soit $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$$f(p(x)) = -\frac{(x+1)^2}{2}p''(x) + (x+1)p'(x)$$

Demontrer que f est lineaire et que $f \circ f = f$. Trouver $\ker f, \text{im} f$ et ses bases.

Exercice 87.

Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et a, b deux réels distincts. On désigne par F l'ensemble des polynômes de E dont a et b sont racines. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base.

Exercice 88.

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ application lineaire donne par:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4, 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4, x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x - 4)$$

Trouver une dimension d'espace $E = \{u \in \text{End}(\mathbb{R}^4) : f \circ u = 0\}$. (on peut voir l'espace $\text{End}(\mathbb{R}^d)$ comme un espace de matrices)

Exercice 89.

Soit $W \subset \mathbb{R}_4[x]$ sous-espace d'espace de polynom $w = \sum_{j=0}^4 a_j x^j$ qui satisfie:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\; x^4 \cdot w(1/x) = w(x)$$

Ecrire W comme l'espace de solutions des equations lineaires entre $a_0, a_1, ..., a_4$.

Soit $w_1 = 1 + tx^2 + x^4, w_2 = sx^2, w_3 = 1 + tx - x^2 + tx^3 + x^4$. Pour quel valeurs de parametres s, t les polynoms w_1, w_2, w_3 forment la base d'espace W.

Exercice 90.

Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de vecteurs de E, $F = \mathrm{Vect}\left((e_1, ..., e_p)\right)$ et G un supplémentaire de F dans E. Pour tout $a \in G$, on note

$F_a = \mathrm{Vect}\left(e_1 + a, ..., e_p + a\right)$

Montrer que $F_a \bigoplus G = E$. Soit $a, b \in G$, montrer que $a \neq b \Rightarrow F_a \neq F_b$.

Exercice 91.

Soit $A \in \mathcal{M}_{2,3}, B \in \mathcal{M}_{3,2}$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et pour $x \in \mathbb{R}^3$ on a $f(x) = A \cdot x$ (produit d'une matrice et d'un vecteur) et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ avec $g(x) = B \cdot x$. Alors $h = f \circ g$ et $h(x) = AB \cdot x$ par composition de applications lineaires.

Determiner BA.

Exercice 92.

Soit M une matrice avec diagonale dominante ($m_{ii} > \sum_{j \neq i} |m_{ij}|$) et soit $\varphi(x) = Mx$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. Demontrer que $\ker \varphi = \{0\}$.

Exemple d'une matrice qui verifie cette propriete est une matrice d'identite I_n. Clairement pour $\psi(x) = I_n x$ on a $\ker \psi = \{0\}$.

Exercice 93.

Déterminer les rangs des matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1+i & -1 & 3-2i \\ 0 & 2+3i & -1 \\ 0 & 5-i & 9 \\ -1 & 8 & 7i \end{bmatrix}.$$

Exercice 94.

Déterminer les rangs des matrices:

$$\begin{bmatrix} a & -b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & 3 \\ 2s & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & t+3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 2 & \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & \\ 1 & 2 & t & 2-2t & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 3 & -t & -2 & \end{bmatrix}$$

en fonction de parametres $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $s, t \in \mathbb{C}$.

Exercice 95.

Pour quel $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{bmatrix} = 3?$$

Exercice 96.

Soit $A \in M_{n,n}, B \in M_{n,m}$, c'est-à-dire les matrices representatives les applications linéaires $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Soit A une matrice inversible. est-ce que rangs des matrices B et AB sont égaux ?

Exercice 97.

Soit $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2\}$ pour $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,2,3), \alpha_3 = (1,2,2), \beta_1 = (1,1), \beta_2 = (1,2)$. et soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application lineaire avec:

$$M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Trouver $M(\varphi)_{st}^{st}$
2. Pour $\alpha = 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3$ trouver les coordonnes $\varphi(\alpha)$ en base $\mathcal{B}$
3. Soit ψ une application lineaire avec matrice $M(\psi)_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Demontrer que $\dim\ker(\varphi \circ \psi) = 1$

Exercice 98.

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ application linéaire donne par:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4, 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4, x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x - 4)$$

Trouver une dimension d'espace $E = \{u \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^4) : f \circ u = 0\}$. (on peut voir l'espace $\operatorname{End}(\mathbb{R}^d)$ comme un espace de matrices)

Exercice 99.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Démontrer que $\dim\ker f = 2$
2. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 100.

Soit $A \in \mathcal{M}_{2,3}, B \in \mathcal{M}_{3,2}$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et pour $x \in \mathbb{R}^3$ on a $f(x) = A \cdot x$ (produit d'une matrice et d'un vecteur) et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ avec $g(x) = B \cdot x$. Alors $h = f \circ g$ et $h(x) = AB \cdot x$ par composition de applications lineaires.

Determiner BA.

7 Determinants

Exercice 101.

Expliquer, sans faire le calcul explicite, pourquoi le determinant vaut zero:

1.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} \quad i,j \in \{1,2,3\}$$

Exercice 102.
Soit P une matrice avec $P_{ij} = 1$ si $i+j = n+1$ et $P_{ij} = 0$ sinon. Calculer $\det P$

Exercice 103.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $S = \{(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,n\} : A_{ij} = 0\}$. Démontrer que si $|S| > n(n-1)$ alors $\det A = 0$.

Exercice 104.
Soit M_t:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & t \\ t & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & t & 2 \end{pmatrix}$$

Trouver les valeurs t pour lesquelles M_t est inversible.

Exercice 105.
Calculer les determinants

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & b_4 \end{pmatrix}$$

Exercice 106.
Soit $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$ les nombres différents. Trouver une solution d'une equation:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z-a_1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \vdots & 1 & z-a_n \end{pmatrix} = 0$$

Exercice 107.
Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Calculer le determinant d'une matrice:

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$

où $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ sont les racines d'une equation $z^3 + az^2 + bz + c = 0$

Exercice 108.
Trouver x:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & x & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & x & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Exercice 109.

Soit $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ et $AB = BA, AC = CA, BC = CB$. Démontrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$, $\det(A^2 + AB + B^2) \geq 0$, $\det(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - AC) \geq 0$

Exercice 110.

Soit $x_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une famille de fonctions dérivables. Soit $X(t) = (x_{ij}(t))_{ij}$ une matrice pour $t \in \mathbb{R}$. Démontrer qu'une fonction $f(t) = \det X(t)$ est dérivable et démontrer que:

$$f'(t) = \sum_j X^j(t)$$

où $X^j(t)$ est une matrice égale à $X(t)$ à l'exception d'une j-eme colonne, où on a $X^j(t)_{ij} = x'_{ij}(t)$. En déduire que $\frac{d}{dt} \det I + tA|_{t=0} = \mathrm{tr} A$.

Rappel : $\mathrm{tr} A = \sum_i A_{ii}$

Exercice 111.

Soit $n \geq 1$ et A_n une matrice avec $A_{ii} = 2$, $A_{ij} = -1$ si $|i - j| = 1$ et 0 sinon. Démontrer que $\det A_n = n + 1$

Exercice 112.

Soit A_n:

$$\begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{pmatrix}$$

Démontrer que $\det A_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$

Exercice 113.

Soit $A_n \in M_n$ et $(A_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \sqrt{-1} & |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Démontrer que $\det A_n$ vérifie la suite de Fibonacci.

8 Series numeriques

Exercice 114. Soit a_n telle que $\sum a_n < \infty$. Est-ce que

$$\sum a_n^{4/5} \quad \sum a_n \sin(a_n)$$

sont toujours convergentes ?

Exercice 115.

1. Démontrer que la série

$$\varepsilon > 0 \sum_{k \geq 0} 2^{-k(1+\varepsilon)} \frac{1}{\exp(2^{-k}) - 1}$$

converge.

2. Est-ce que la conclusion restera la même si $\varepsilon < 0$?

Exercice 116.

1. En passant par la comparaison séries/integral démontrer qu'il existe un constante C_f telle que $\ln n! \geq C_f\,(n \ln n - n)$ (au moins pour n assez grand)

2. Soit $(a_k)_{k\geq 1}$ telle que $\forall k \geq 1 \;\; a_k \leq Ck$ pour une constante $C > 0$. Démontrer qu'il existe $\lambda > 0$ telle qu'une serie suivante converge

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(\lambda a_k)^k}{k!}$$

Indication: en utilisant la bornee d'un point 1., échanger $k! \simeq \exp(n \ln n - n)$, borner par une serie qui converge.

Exercice 117. Trouver la somme d'une serie ou démontrer qu'elle n'existe pas

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{2n+1} - \frac{n+2}{2n+3} \right)$$

Exercice 118. Étudier convergence

$$\sum_{n\geq 1} 2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

Exercice 119.

1. Étudier convergence d'une serie avec a_n:

$$a_n = 2^{(1-\sqrt[n]{2})}$$

2. Trouver toutes les valeurs du parametre $a \in \mathbb{R}_+$ telles qu'une série:

$$\varepsilon_n = 2^{\frac{1}{1-\sqrt{n}2}} \quad a_n = a^{\varepsilon_n}$$

converge.

Exercice 120.

1. Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série convergent. Est-ce qu'une serie:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{\ln n} \left(n^{a_n} - 1 \right)$$

converge ? Si oui, donner une preuve, sinon donner une contrexemple.

2. Soit $\alpha, \beta > 0$. Trouver condition suffisante sur α, β pour qu'une serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n^\alpha}{\ln n} \left(n^{(a_n)^\beta} - 1 \right)$$

converge. (on n'étudiera pas la condition nécessaire)

Exercice 121. Soit $f(x) = 2 - 2\cos(x) - x \cdot \sin(\sin(x))$ et considerons $a_n = f(1/n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Trouver toutes les nombres reels w telles que $\sum_{n\geq 1} a_n^w < \infty$.

Exercice 122. Etudier la convergence des séries suivantes en fonction d'une paramétre $\alpha > 0$:

1. $\sum_{n\geq 1}\left(b^{1/n}-1\right)^{\alpha}$

2. $\sum_{n\geq 1}\left(n^{1/n}-1\right)^{\alpha}$

Exercice 123. Démontrer que:

$$\sum_{n\geq 2}\frac{\exp\left(n(1-n^{1/n})\right)}{\ln^2(n)}<\infty$$

(si nécessaire passer par comparaison avec l'integrale)

Exercice 124. Etudier convergence:

$$\sum_{n}\left|\cos\left(\left(n^3+\sqrt{n}+7\right)^{1/3}\right)-\cos\left(\left(n^3-2\sqrt{n}+3\right)^{1/3}\right)\right|$$

Indication: utiliser $\cos(a)-\cos(b)=-\sin((a-b)/2)\sin((a+b)/2)$ et les équivalences, puis obtenir comparaison avec $n^{-\alpha},\alpha>0$

Exercice 125.
Etudier convergence:

1. $$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\ln\left(1+\sqrt[n]{n}\right)$$

2. $$\sum_{n\geq 1}\frac{(n+1)!(n+1)^{n-1}}{n^{2n}}$$

3. $$\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n^2}{\sqrt{n+1}}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$$

9 Integrale de Riemann

Exercice 126.
Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\frac{k}{n^2}$

2. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2+kn-k^2}}{n^2}$

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}(n+2)^{n+2}\dots(2n)^{2n}}{n^{n+1}n^{n+2}\dots n^{2n}}\right)^{1/n^2}$

4. $\lim_{n\to\infty}\sum_{p=n+1}^{p=2n}\frac{1}{p^{\alpha}}$ en fonction de $\alpha\geq 1$, puis avec $\sin(1/p)$ au lieu de $\frac{1}{p^{\alpha}}$

Exercice 127.

1. Soit f une fonction derivable. Demontrer qu'il existe une constante C telle que:

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad\int_0^{2\pi}f(x)\sin(kx)dx\leq\frac{C}{k}$$

2. Est-ce que le meme resultat tiendra si on remplace f par une fonction constante par morceaux ? Puis continue par morceaux.

Exercice 128.
Soit $\alpha \in]0,1[$. Calculer la limite:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r\,|\ln r|^\alpha} \int_0^r |\ln x|^\alpha \, e^{-x^2} dx$$

Si besoin on peut admettre:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b f^p(x)dx\right|^{1/p} \left|\int_a^b f^q(x)dx\right|^{1/q} \qquad p^{-1}+q^{-1}=1$$

Exercice 129.
Calculer la limite:

$$\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

lorsque $n \to \infty$

Exercice 130.
Calculer la limite:

$$\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)$$

lorsque $n \to \infty$

Exercice 131.
Soit f continue. Demontrer que F:

$$F(x) = \int_a^b f(t)\sin(xt)dt$$

est lipschitzienne si $a < b \in \mathbb{R}$.

1. Quel hypothese sur f faut-il pour que F soit lipschitzienne si $a=0, b=\infty$?
2. Soit $F(x) = \int_a^b f(xt)dt$ pour f continue, pas forcement Lipschitz et $x \geq 0$. Est-ce qu'on peut dire que F est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 132.
Soit f fonction continue telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$. Montrer que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = a$$

10 Theorie de nombres

Exercice 133.
Soit a, b premieres entre eux. Montrer que $\ln(a)/\ln(b)$ est irrationnel.

Exercice 134.
Montrer que $40^n n! | (5n)!$

Exercice 135.
Soient a et b deux rationnels tels que $a+b, a\times b$ sont des entiers. Prouver a et b sont des entiers.

Exercice 136.
Demontrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$$

En deduire que $609 | 5^{4n} - 2^{4n}$

Exercice 137.
Soient a, b, n trois entiers supérieurs ou égaux à 1. On note q le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b, et r le reste. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Exercice 138.
Calculer les pgcd suivants $(n^2+n) \wedge (2n+1), (15n^2+8n+6) \wedge (30n^2+21n+13)$

11 Denombrement

Exercice 139.
Combien de sequences $\{0,1,2\}^n$ avec au moins un zero, un 1 et un 2.

Exercice 140.
Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer le nombre de sequences $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ou $a_i \in \{0,1\}$ telles que

$$|\{i : a_i = 0, a_{i+1} = 1\}| = m$$

Exercice 141.
On divise l'ensemble $\{1, 2, ..., 2n\}$ en n sous-ensembles de taille 2. Combien de possibilites de le faire ? Autrement dit, calculer la taille d'ensemble

$$\{\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} : \forall i \in \{1, ..., n\} \quad |w_i| = 2 \quad w_1 \cup w_2 \cup \ldots \cup w_n = \{1, 2, \ldots, 2n\}\}$$

Exercice 142.
Soit X un ensemble d'un taille $2n$. Calculer le nombre de sous-ensembles A telles que $|A|$ est divisible par 2.

1. Démontrer $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$
2. Démontrer que le nombre de sous-ensembles de taille 2 est égale à $\binom{2n}{2}$. Generaliser à taille $2k, k \in \{1, ..., n\}$
3. Calculer la somme de expressions obtenus dans le point 2.

Si besoin dans le point 3 on peut s'appuyer sur:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Exercice 143.
Soit $P_r(n) = \{A \subset \{1, ..., n\} : |A| = r\}$. Calculer pour $r = 2, 3$

$$\sum_{A \in P_r} \min(A)$$

Est-ce qu'on peut generaliser a r quelconque ?

Exercice 144.

1. On a k boules differents. On tire deux fois avec remplacement. Demontrer que

$$k^2 = \binom{k}{1} + 2\binom{k}{2}$$

2. Utiliser $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ pour calculer $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

12 Probabilite

Exercice 145.
On dispose n pieces, mais k parmi eux sont asymmetriques et tombe sur pile avec probabilité $1/3$. On a choisi une piece par hasard et a obtenu une pile. Calculer la probabilité que c'était une piece symmetrique.

Exercice 146.
On a n boules dans une urne, avec $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ (on ne sait pas). On tire deux boules sans remise et écrire les chiffres dans l'ordre de tirage. Le nombre qu'on a obtenu a été inférieure a 44. Calculer la probabilité que $n = 3$.

Exercice 147.
On a n pieces et parmi eux il y a une piece avec deux piles. Sur une piece choisi par hasard on a pile 6 fois d'affilé. Calculer la probabilité que c'était une piece avec deux piles.

Exercice 148.
Arnault, Benoît et Camille essayent de obtenir pile, chacun une fois. On sait que deux d'entre eux on réussi. L'événement plus probable est a) Camille a réussi b) Camille n'a pas réussi c) tous les deux ont la probabilité égale

Exercice 149.
On lance une piece symmetrique $2n$ fois. Soit P_{2n} une nombre de piles obtenus et F_{2n} une nombre de faces obtenus. Fixons $k \in \mathbb{N}$ (qui sera un constant). Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|P_{2n} - F_{2n}| \leq 2k\right)$$

Utiliser la formule $n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Exercice 150.
Un joueur peut gagner 1 euro avec probabilité p ou en perdre avec probabilité $1 - p$. Il commence avec le capital C de $C = a$ euros. Le jeu s'arrête dès que $C = 0$ ou $C = c$, $c > a$. Calculer probabilité qu'il existe un moment ou $C = 0$

Exercice 151.
On a $n \in \mathbb{N}$ boules noires et $b \in \mathbb{N}$ blanches, on tire les boules succesivement. Soit C_k un evenement "n-eme tirage donne une boule noire". Demontrer que $\mathbb{P}(C_k) = \frac{n}{n+b}$.

Exercice 152.
Calculer le probabilité que le nombre de réussites dans le scheme de Bernoulli avec n et p sera divisible par 2. Calculer la limite $n \to \infty$.

Exercice 153.
Calculer le probabilité que le nombre de réussites dans le scheme de Bernoulli avec n et $p = 1/2$ sera divisible par 3 et 4. Calculer la limite $n \to \infty$.

Exercice 154.
Société d'assurance a des clients qui sont à cause des accidents avec probabilité p_c^A (c est pour *calme*) et des autres qui sont a cause des accidents avec probabilité p_f^A (f est pour *fou*). Proportion du chaque groupe des clients est donne respectivement avec q et $1 - q$. Probabilité d'accident est constante pour chaque client chaque année. Calculer

1. Calculer la probabilité d'accident pour un client choisi au hasard
2. Calculer la probabilité que le client qui été à cause d'un accident en année N sera à cause d'accident en année $N + 1$.
3. Il n'y a pas notion de consequence dans la modele, pourtant on observe que la probabilité d'accident est plus élevé dans le point 2 que dans le point 1. Pourquoi ?

13 Produits scalaires

Exercice 155.
Soit (α_n) une suite de vecteurs orthonormaux dans une espace euclidien $(V, \langle , \rangle)$.

1. Démontrer que $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha, \alpha_i \rangle \alpha_i$ si $\alpha = \text{Vec}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.
2. Soit v tel que $\|v\|^2 > \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha_i, v \rangle^2$. Est-ce possible que $v \in \text{Vec}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$

Exercice 156.
Soit M_t une matrice:

$$M_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Pour quel t on a $(1, 0, 0)M_t(0, 0, 1)^T = 0$? Si $t = 2$ completer $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$ a une base d'espace $(\mathbb{R}^3, M_2)$. (on peut admettre que $(v, w) \mapsto (v, M_2 w)$ est un produit scalaire)
2. Soit $L = (1, 1, 2) + \text{Vec}((1, 0, 0)), K = (1, 2, 2) + \text{Vec}((0, 0, 1))$. Trouver une distance entre L, K dans l'espace $(\mathbb{R}^3, M_2)$.

Exercice 157.
Soit $H, M \subseteq \mathbb{R}^4$ sous-espace affines. Si $H = v + W$, où W est une espace linéaire, on notera $W = T(H)$.

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_4 = 4, x_3 + x_4 = 2\} \quad M = (1, 0, 2, 0) + \text{Vec}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$$

1. Trouver une base orthonormale d'espace $T(H) + T(M)$, completer à une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$
2. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ une projection orthogonale sur M. Démontrer que $f((3, 0, 1, 1)) = (1, 0, 2, 0)$.
3. $K = f(H)$. Démotrer que K est une droite et trouver sa parametrisation
4. Trouver la distance $\rho(H, M)$
5. Démontrer que pour tout $k \in K$ on a $\rho(k, H) = \rho(M, H)$

Exercice 158.
Dans l'espace $\mathbb{R}^2$ avec un produit scalaire standard trouver deux vecteurs u, v telles que $u \in \text{Vec}((1, 3)), v \in \text{Vec}((1, 3))^\perp$ et $u + v = (1, 2)$. Pareil pour $\mathbb{R}^4, u = (1, 2, 0, 3), v = (2, 3, -1, 0)$ et on veut trouver $a, b \in \mathbb{R}$ avec $z = (0, 0, 1, 1) + av + bw \in \text{Vec}((u, v))^\perp$ (Si cela prends trop du temps, on se contentera de système linéaire finale à résoudre)

Exercice 159.
Donner un exemple d'un produit scalaire* tel qu'une système $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, -1, 0), \alpha_3 = (1, 0, 1)$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ muni de ce produit scalaire.
*on cherche dans l'ensemble des applications $\varphi(u, v) = \sum_{ij} \alpha_{ij} u_i v_j$, donc il faut trouver les valeurs de α_{ij}.

Exercice 160.

Dans une espace $\mathbb{R}^4$ donner système linéaire qui décrit espace orthogonale a $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

Exercice 161.

Dans l'espace $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ un produit scalaire de polynôms s'écrit avec $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Trouver une complémentaire orthogonale a:

1. sous-espace des polynôms avec $f(1) = 0$
2. sous-espace des polynôms de dégre paire

Exercice 162.

Soit $(v_i), (w_i)$ deux suites de vecteurs dans l'espace euclidien avec $\langle v_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$. Démontrer que v_i est une famille libre.

Exercice 163.

Soit V une espace euclidien et soit W_1, W_2 sous-espaces de V avec $\dim W_1 < \dim W_2$. Démontrer qu'il existe une vecteur $v \in W_2$ avec $v \in W_1^{\perp}$

Exercice 164.

Soit $\alpha_t = (t^2, 0, 1, t)$ et soit β_t une projection orthogonale sur $\mathrm{Vec}((1, 1, 1, 1))$. Pour quel t la longueur de β_t est-elle minimale ?

Exercice 165.

Appliquer Gram-Schmidt a:

1. $v_1 = (2, -1, 0, -2), v_2 = (4, 1, 4, -4), v_3 = (0, 0, 1, 0), v_4 = (0, 0, 0, 1)$
2. $W = \mathrm{Vec}((1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1))$

Exercice 166.

Soit V une espace linéaire avec deux produits scalaires φ, ψ qui satisfient:

$$\psi(u, v) = 0 \Leftrightarrow \varphi(u, v) = 0$$

1. Démontrer que $\psi(u, u) = \psi(v, v)$ ssi $\varphi(u, u) = \psi(v, v)$
2. Démontrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall\, u, v \in V$ on a $\psi(u, v) = c\varphi(u, v)$